CONTRIBUCIÓN PARA LA DOCENCIA

Probabilidad en el camino de una hormiga: una propuesta de enseñanza con uso de metáforas

Gamaliel Cerda-Morales

Resumen: Basado en la teoría de Lakoff y Núñez (2000) sobre "¿De dónde vienen las matemáticas?", este trabajo muestra algunas reflexiones sobre los fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el aprendizaje de las matemáticas. En particular, se propone un ejemplo concreto de modelización matemática que permite explicar cómo puede sustentarse la construcción del concepto "probabilidad" mediante el uso de metáforas que existen en el discurso del profesor.

Palabras clave: educación, matemáticas, metáforas, ciencias cognitivas, modelización.

Probability in the way of an ant: a proposal for teaching use of metaphors

Abstract: Based on the theory of Lakoff and Núnez (2000) on "Where mathematics comes from?", this work shows some reflections on the phenomena related to the use of metaphors in the learning of mathematics. In particular, we propose a concrete example of mathematical modelling to explain how the construction of the term "probability" may be supported by the use of metaphors that exist in the teacher's speech.

Keywords: education, mathematics, metaphors, cognitive sciences, modelling.

INTRODUCCIÓN

La teoría sobre "¿De dónde vienen las matemáticas?", propuesta por Lakoff y Núñez (2000), hace énfasis en el estudio de los procesos cognitivos que ponen en juego quienes aprenden las matemáticas. La principal tesis que construyen los

Fecha de recepción: 14 de octubre de 2013; fecha de aceptación: 2 de noviembre de 2015.

autores afirma que el origen de las estructuras matemáticas que construyen las personas, y también las que se construyen en instituciones, se encuentran en los procesos cognitivos cotidianos como son la percepción, la memoria y el pensamiento metafórico. Según estos autores, dichos procesos permiten explicar cómo la construcción de los objetos matemáticos está sostenida por la forma en que se relacionan el cuerpo humano y los objetos de la vida cotidiana.

Desde lo abstracto, las metáforas se caracterizan por construir un puente conceptual entre un dominio de partida y un dominio de llegada que permite proyectar propiedades del dominio de partida en el de llegada. Soto-Andrade (2006) pone énfasis en el tránsito del modo cognitivo verbal-secuencial, dominante en la enseñanza de la matemática, a otros modos cognitivos menos habituales, eventualmente no verbales y no secuenciales, que deben ser en medida estimulados en el aprendizaje actual de las matemáticas. Se propondrá un ejemplo en este trabajo con el fin de evidenciar que las metáforas crean una cierta conexión que permite que se trasladen una serie de características y estructuras desde un dominio concreto a otro más abstracto. Ahora bien, las metáforas sólo dejan ver un aspecto del dominio de llegada que de ninguna manera constituye su totalidad; en este sentido, nos sirven para mostrar el aspecto que deseamos evidenciar y ocultar otros, de los cuales muchas veces ni siquiera somos conscientes. Entre sus funciones, la metáfora permite conectar diferentes sentidos y ampliar el significado que tiene para una persona un determinado objeto, en nuestro caso, un objeto matemático.

Primero, asumimos la interpretación de la metáfora como la comprensión de un dominio en términos de otro y proponemos un ejemplo concreto de modelización que permite conocer la naturaleza del concepto probabilidad y abordar su enseñanza en la educación secundaria (16-17 años) mediante el uso de metáforas en el discurso del profesor.

Metáforas conceptuales

Nuestra representación concreta del mundo está siempre influida por las metáforas que inyectamos en él, casi siempre de una manera inconsciente (Acevedo, 2005). La mayor parte de los seres humanos conceptualizamos cosas abstractas en términos de cosas concretas. Una posible explicación de estas metáforas, llamadas metáforas conceptuales, es que se sustentan en las experiencias que vive nuestro cuerpo para relacionarse con su entorno físico y cultural. En este sentido, Lakoff y Núñez (2000) distinguen dos tipos de metáforas que se observan comúnmente en matemáticas y cuyo dominio de llegada podría estar dentro o fuera de ellas.

- Las **metáforas de anclaje** (*grounding metaphores*) son las que tienen su dominio de partida dentro de las matemáticas, pero su dominio de llegada fuera de ellas. Por ejemplo: "las clases son contenedores", "los puntos son objetos", etcétera.
- Las **metáforas de vinculación** (*linking metaphores*) tienen su dominio de partida y de llegada en las mismas matemáticas. Por ejemplo: "los números reales son puntos de una recta", "las funciones de proporcionalidad directa son rectas que pasan por el origen del plano", etcétera.

La importancia que tiene el pensamiento metafórico en la construcción del significado de los objetos matemáticos es reconocida en didáctica de las matemáticas y es el origen de una teoría sobre las matemáticas propuesta por Lakoff y Núñez (2000). Según este punto de vista, el aprendizaje de las matemáticas se ubica en las ideas de las personas, no en las demostraciones formales, axiomas y definiciones. Es común en la enseñanza tradicional de las matemáticas evaluar métodos, algoritmos y aplicación de fórmulas simples y complejas; sin embargo, mientras más aprendemos del origen de las matemáticas, más entendemos que su enseñanza debe advertirse desde el aspecto cognitivo del sujeto que las aprende (Sfard, 1997; Varela, Thompson y Rosch, 1998), y aquí, las metáforas que tienen mayor impacto cognitivo involucran un cambio significativo en el modo de pensar del estudiante.

Durante la última década se ha tomado progresivamente conciencia del hecho de que las metáforas no son sólo artefactos retóricos, sino potentes herramientas cognitivas que nos ayudan a construir y aprender nuevos conceptos matemáticos, así como a resolver problemas de manera eficaz y amigable para el estudiante (Acevedo, 2005; Araya, 2000; Dubinsky, 1999; Duval, 1995; Johnson y Lakoff, 2003; Lakoff y Núñez, 2000).

Se reconoce la existencia de metáforas conceptuales que son transformaciones o "mapeos" de un dominio "fuente" a un dominio "objetivo" que transportan las características deducidas del primero en las del segundo y nos permiten entender el segundo, por lo general más abstracto y opaco, en términos del primero, más "aterrizado" y transparente. Por lo demás, el término "metáfora" se utiliza actualmente en un sentido cada vez más laxo como sinónimo de "representación" y "analogía" (Palmquist, 2001). En este sentido, la "representación" traslada características de un dominio más abstracto a uno más transparente, y una "analogía" lo hace entre dominios iguales.

PROPUESTA DE METÁFORAS EN LA ENSEÑANZA DE PROBABILIDADES

La probabilidad es esencial para preparar a los estudiantes, puesto que el azar y los fenómenos aleatorios impregnan nuestra vida y nuestro entorno (Bennet, 1998). Por otro lado, la cultura en probabilidad (Gal, 2005) requiere no sólo conocimientos, sino actitudes que lleven a los estudiantes a interesarse por mejorar su conocimiento, incluso finalizado su aprendizaje en la escuela o universidad. Si bien la enseñanza de las probabilidades tiene por objetivo lograr que el estudiante sea capaz de obtener la frecuencia de algún suceso determinado mediante la realización de un experimento aleatorio del que se conocen todos los resultados posibles y bajo condiciones suficientemente estables, muchas veces no se cuenta con todas las herramientas para predecir la ocurrencia de cierto suceso en el futuro.

Este trabajo presenta un ejemplo concreto en la enseñanza del concepto "probabilidad" que permite evidenciar cómo un enunciado, que resulta *a priori* complejo y abstracto para estudiantes de secundaria (16-17 años), puede visualizarse de manera más "sencilla" y transparente mediante el uso de metáforas en el discurso del profesor. Y más aún, cómo podemos advertir a través de ellas características mucho más familiares para el estudiante que lo incentiven a resolver la problemática.

Ejemplo

Una hormiga se pasea alegremente por un tetraedro de alambre, eligiendo, cada vez que llega a un vértice, cualquiera de las tres aristas a las que está conectado, con igual probabilidad. Además siempre recorre cada arista "de un tirón", sin detenerse o cambiar de dirección a mitad de camino.

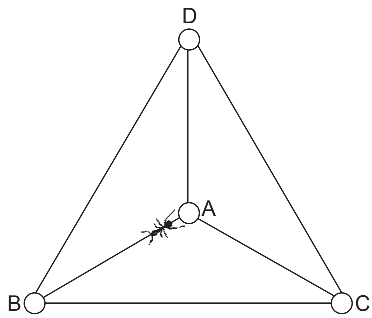

Figura 1. La hormiga en los vértices del tetraedro regular

Si la hormiga se encuentra inicialmente en el vértice A del tetraedro (como indica la figura 1), ¿dónde estará después de recorrer una arista, dos aristas, tres aristas? ¿Dónde estará después de recorrer m aristas? ¿Dónde estará al cabo de recorrer muchísimas aristas? ¿A qué vértice(s) conviene más apostar con el tiempo?

Por otro lado, podemos representar el mencionado paseo al azar, por una repartición iterada de fluido; por ejemplo, jugo de naranja entre cuatro amigos, que comienza cuando uno de ellos reparte un litro de jugo a los otros tres que no tienen nada, y luego cada uno de ellos hace lo mismo con los otros tres, y así sucesivamente. Esto es, si ya entendemos en alguna medida lo que es un paseo al azar. Pero si estamos recién descubriéndolo o construyéndolo, diríamos que la repartición de jugo es una metáfora del paseo al azar de la hormiga. De esta manera, podemos determinar de manera cuantitativa la presencia de la hormiga en los vértices del tetraedro, un juego abstracto si no se recurre a las metáforas. No olvidemos que no se trata de una metáfora de la metáfora, sino de lograr una "analogía" en el dominio de partida que nos permita descubrir más características en la propuesta diseñada.

Soto-Andrade (2007) se refiere a las metáforas de los paseos al azar para un polígono regular (específicamente un triángulo equilátero). Utilizando la notación de este autor, este trabajo generaliza los paseos o caminatas a un poliedro regular en tres dimensiones, evidenciando ciertas variantes que, desde el discurso del profesor, podrían mejorar la enseñanza-aprendizaje del concepto probabilidad. A continuación, los abordajes metafóricos de nuestra problemática:

La *metáfora salomónica* ve a la hormiga partida en tres porciones en el primer paso, donde cada tercio de hormiga aterriza en uno de los tres vecinos inmediatos, y así en cada paso de manera sucesiva. Van apareciendo así pedacitos de hormiga en cada vértice del tetraedro, que podemos ir añadiendo fácilmente paso a paso, para calcular la porción de hormiga presente en cada vértice después de *m* caminatas. Nótese que esta metáfora facilita el descubrimiento de la analogía entre el paseo de la hormiga y la evolución de un mercado de consumidores (en iguales condiciones) disputado por cuatro productores. En este caso, la probabilidad de encontrar a la hormiga en cierto vértice resulta ser la parte del mercado controlada por un productor.

La *metáfora hidráulica* ve el cálculo de las probabilidades en cuestión como el flujo o escurrimiento de un litro de fluido probabilista por una red de mangueras, con repartición equitativa en cada bifurcación. Así, la repartición de un litro de jugo de naranja entre cuatro personas no se trata de una metáfora de los paseos al azar, sino más bien de una representación concreta de éste.

La *metáfora frecuentista* ve un enjambre de hormigas que parte del vértice dado y se divide en tres partes iguales entre los tres vecinos, cada vez. Si se considera $m = 8$, por ejemplo, astutamente soltamos $3^8 = 6\,561$ hormigas, que se irán repartiendo por tercios en los vértices del tetraedro. Basta ir registrando la cantidad de hormigas que van llegando a cada vértice hasta la octava bifurcación. El porcentaje de hormigas que llegó a cada vértice da entonces la probabilidad de presencia de la hormiga aleatoria original en ese vértice, al cabo de la octava caminata.

Finalmente, en la *metáfora platónica*, que es cuando se lanza una moneda de tres caras (si existiese una), donde cada cara cae una vez con igual probabilidad, la hormiga tira una moneda de tres caras para elegir el camino que tomará en el tetraedro. Así, las probabilidades se asignan o calculan como frecuencias relativas de una estadística platónica.

UNA SOLUCIÓN METAFÓRICA AL PROBLEMA

La probabilidad de encontrar a la hormiga en el vértice A del tetraedro regular, denotada por P(A), se observa en el cuadro 1 para las primeras cinco caminatas de la hormiga.

Utilizando la metáfora salomónica, podemos asegurar que la evolución del mercado tiende a equipararse y, por tanto, los cuatro productores obtienen la misma ganancia. En el caso de la hormiga y verificando los valores del cuadro 1, su presencia en los vértices del tetraedro tiende a equipararse igualando el valor 0.25. En breve, se requiere un argumento matemático para verificar dicha

Cuadro 1. Probabilidades en la metáfora platónica

Caminata	P(A)	P(B)	P(C)	P(D)
0	1/1	0/1	0/1	0/1
1	0/3	1/3	1/3	1/3
2	3/9	2/9	2/9	2/9
3	6/27	7/27	7/27	7/27
4	21/81	20/81	20/81	20/81
5	60/243	61/243	61/243	61/243
...	...	...	...	...

Tabla 2. Probabilidades de estar en el vértice B

Caminata	0	1	2	3	4	5
P(B)	0	1/3	2/9	7/27	20/81	61/243

afirmación, la cual resulta ser mucho más abstracta para el estudiante que aún no conoce conceptos como “sucesión numérica” o “límite”.

Entre aquellas deducciones que el alumno podría advertir del cuadro 1, está la suma de las probabilidades de presencia en los vértices igual a 1, que podría llamarse “ley de conservación de la hormiga”, nada se origina ni se destruye, todo se transforma. Más concreto aún, la presencia de la hormiga en el vértice B está dada en el cuadro 2.

De donde se observa que el denominador es potencia de 3, y el numerador, un término de la sucesión numérica (0, 1, 2, 7, 20, 61...). La tarea matemática será tratar de definir una recurrencia en la sucesión anterior, algo que a priori resulta inalcanzable para el nivel en el que se ha diseñado la propuesta. Pero, ¿qué tan complejo puede ser, si se advierte una relación lineal entre las P(B), a medida que aumenta la caminata de la hormiga?

Si denotamos $P_m(A) = a_m/3^m$ y $P_m(B) = b_m/3^m$. la probabilidad en la caminata m-ésima de la hormiga, por ley de conservación, tenemos $P_m(A) + 3P_m(B) = 1$, pues la probabilidad de encontrar a la hormiga en los vértices B, C y D es la misma. En particular, $a_m + 3b_m = 3^m$. Además, desde el cuadro 1, se tiene $a_m - b_m = (-1)^m$. Al resolver el sistema de ecuaciones con dos incógnitas, la sucesión b_{m} es $(3^m - (-1)^m)/4$, para todo número natural m y la probabilidad de estar en el vértice B es $P_m(B) = (1-(-1/3)^m)/4$ y, por tanto, $P(C) = P(D) = (1-(-1/3)^m)/4$. Al usar la ley de conservación, la probabilidad de encontrar a la hormiga en el vértice A es $P_m(A) = (1 + 3(-1/3)^m)/4$.

Como hemos advertido, el alumno podría resolver el problema haciendo uso de los sistemas de ecuaciones lineales. Sin embargo, aún no es claro cómo podría advertir las variables que están en juego desde el cuadro 1. Allí el profesor juega un papel importante, pero nuestro objetivo es explicar el problema de manera que los alumnos recurran a las metáforas y obtengan desde allí datos más sencillos con los cuales poder resolverlo.

Para Lakoff y Núñez, el uso de metáforas es fundamental en la comprensión de cualquier tema y, por tanto, en su explicación. Ahora bien, también puede haber causas relacionadas con las matemáticas, ya que el cálculo de probabilidades necesita, además de una descripción en términos globales, la introducción de conceptos locales, como la distribución muestral, que simplificaría el estudio azaroso de la hormiga. Estos conceptos locales presentan una gran dificultad para los alumnos, motivo por el cual, a mi entender, hay profesores que los dejan en un segundo plano y prefieren utilizar una tabla de datos que muchas veces resulta ser un recurso fructífero en el salón de clases.

Nótese que, para enseñar un contenido abstracto, es importante el uso de material concreto, y aquí desempeñan un papel fundamental las metáforas. Según Johnson y Lakoff (2003), los estudiantes que han suprimido parte de su infancia tendrán mayor dificultad para aprender los conceptos abstractos; y en este camino, las metáforas no tendrán un suelo fértil para florecer.

Batanero (2000) establece que el acercamiento del alumno hacia la construcción del significado de la probabilidad en el aula debe considerar la simulación manipulable con lápiz y papel para muestras pequeñas. Este juicio permite verificar si existe un terreno fértil para que la metáfora probabilística pueda florecer en el estudiante. En nuestro caso, este efecto proporciona más que una herramienta, un terreno infértil si el profesor no es capaz de suministrar los recursos útiles para desarrollar los contenidos que el alumno debe adquirir. Por ejemplo, si el objetivo es que el alumno aprenda sobre sistemas de ecuaciones lineales, la probabilidad como concepto resulta innecesaria sin el uso de metáforas. Mientras más asimila las analogías del paseo, mejor es su aprendizaje de la evolución de la caminata azarosa de la hormiga.

Si el profesor plantea en su discurso un tipo de metáfora salomónica o hidráulica, podría inducir al alumno a entender la probabilidad como una parte de la hormiga determinada sobre los vértices en el camino que recorre o parte de un fluido que transita por una red de mangueras. Palabras como “la hormiga se particiona”, “el líquido se reparte de manera equitativa” pueden producir este efecto en el alumno. Para Lakoff y Núñez (2000, p. 38) esta es una poderosa metáfora utilizada muy a menudo por los profesores en todos los niveles de enseñanza. En dicha metáfora se sugiere una organización espacio-temporal, se tiene un origen (“de”), un camino (“pasa por”, “aquí”, “en su caminata”), y un fin (“a”, “hasta”, “dónde estará”) y además se contempla algo que se mueve y que se puede localizar en un momento dado (los vértices en el camino).

EL PAPEL DE LA METÁFORA EN LA NEGOCIACIÓN DE SIGNIFICADOS

En su discurso, el profesor tiene por objetivo recordar el concepto "punto de partida" y los posibles caminos por seguir desde ese punto de partida. En el paseo al azar, el profesor propone un primer ejemplo breve con el uso de una moneda; en este sentido, el profesor introduce la formulación: la probabilidad de obtener cara o sello es la misma. Esta formulación resulta más operativa para el cálculo de una probabilidad, ya que facilita entrar en un "juego de lenguaje" que permite llegar a un consenso sobre cuáles son las reglas del juego. Un caso especial resulta si ya no tenemos una moneda y el dominio de aplicación se incrementa en tres posibles opciones.

A continuación, algunas indicaciones que podrían orientar el discurso del docente al tratar esta problemática en el aula, con ella se pone en juego el siguiente lenguaje:

- *Introducción de un elemento genérico*. El profesor introduce el elemento genérico *hormiga* sobre la cual se realizarán las operaciones indicadas en la formulación del enunciado, mediante la frase "camina a cualquiera de las tres aristas a las que está conectada con igual probabilidad" (señalando los caminos desde el vértice A del tetraedro con el dedo), y después dice "¿qué ocurre en la primera caminata?" y espera que los alumnos mentalmente encuentren los valores para los cuales se pueden realizar las operaciones indicadas en la formulación del enunciado.

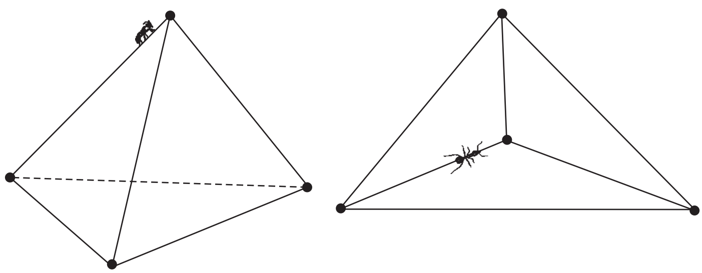

Figura 2. La hormiga en el tetraedro regular

- *Consenso sobre el rango de valores del elemento genérico*. Los alumnos podrían formular hipótesis sobre el dominio hasta llegar a un

> consenso que es aceptado por todos y, sobre todo, por el profesor. En este caso, los alumnos podrían decir que "todos tienen probabilidad 1/3 menos el vértice A que tiene probabilidad 0" y el profesor da por buena esta afirmación.

En la segunda parte, el profesor puede reproducir el mismo juego de lenguaje con algunas variantes. La primera variante es que, en este caso, el elemento genérico está en un punto de partida distinto. En efecto, en este caso el profesor escribe 1/3 en cada vértice, salvo en A, donde escribe 0, y espera que los alumnos mentalmente apliquen la técnica de: *1)* pensar en nuevos puntos de partida, *2)* graficar los resultados en un cuadro según la caminata observada, *3)* observar que en el cuadro hay datos que se repiten y deben omitirse (la probabilidad de estar en los vértices B, C y D es la misma), y *4)* que este razonamiento es válido para cualquier punto de partida. La segunda variante es que, cuando los alumnos responden "parece que tiene mayor probabilidad de estar en A", el profesor considera ambigua esta respuesta para llegar a un consenso y decide intervenir pidiendo a los alumnos que centren su atención en los demás vértices, omitiendo cierta afirmación a priori desde el vértice A.

Es importante remarcar que el consenso al que se llega podría estar expresado en términos metafóricos, donde los alumnos y el profesor utilizan la expresión "tres vértices tienen igual probabilidad", los alumnos lo hacen oralmente, mientras que el profesor, a esta expresión oral, asocia la representación del cuadro originado del enunciado y también la gesticulación sobre la parte externa de la figura 1, moviendo la mano desde el origen a los demás vértices; con ello hace corporal un conocimiento previo, las otras tres opciones son iguales. Así, el movimiento de las manos en el profesor podría dar a entender una respuesta errada por parte del alumno; es decir, el vértice A tiene menos probabilidad de albergar a la hormiga, ya que me "trasladé" desde A. Por ejemplo, Marghetis y Núñez (2013) estudian el movimiento ficticio (o *fictive motion*) presente en la enseñanza del concepto "continuidad" en matemáticas, poniendo énfasis en las consecuencias que puede traer el acto corporal en el actuar de quien lo enseña.

La combinación del lenguaje dinámico y la distribución del mercado entre cuatro productores permiten entender el dominio del enunciado como el resultado de una distribución que verifica el principio de repartición equitativa (lo que matemáticamente se entiende como equiprobables).

Según Lakoff y Núñez (2000, p. 158), entendemos este caso de paseo al azar como resultado de un movimiento sin fin que tiene un principio gracias a que solemos proyectar metafóricamente sobre este tipo de procesos nuestro conocimiento de los procesos cotidianos, que en su mayoría tienen principio y fin. Más aún, los procesos que continúan indefinidamente se conceptualizan metafóricamente como que tienen un final y un último resultado. Para los autores, este tipo de conceptualización es el resultado de la aplicación de lo que ellos llaman la metáfora básica del infinito. En mi caso, y por experiencia empírica, he decidido llamarla metáfora del juicio final.

Presentamos este problema de paseos al azar como mecanismo de aprendizaje y enseñanza en educación secundaria. No tan sólo como forma discreta de analizar un problema de tipo probabilístico (azaroso a priori), sino como herramienta matemática para verificar conjeturas que suelen ser advertidas en este tipo de contenidos en la enseñanza tradicional, ahora mediante el uso de metáforas.

Actividades cognitivas en el aprendizaje

Duval (1996) distingue dos características propias de la actividad cognitiva involucradas en el aprendizaje de las matemáticas. Por un lado, varios registros son comúnmente observados en el juego matemático y dichos objetos (matemáticos) no pueden ser aprendidos de manera perceptiva; surgen entonces las interrogantes: ¿Cómo es posible aprender a pasar de un registro a otro? ¿Cómo enseñamos a no confundir un objeto matemático con su representación?

El origen de varias dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se vincula a estas dos preguntas. Los problemas de probabilidad son ambiguos en cuanto a la clase de validación buscada por el profesor (por ejemplo, ¿puedo usar calculadora para justificar mi conclusión?). El tipo de problema y el tipo de validación son, ambos, parte de la responsabilidad del maestro, con el fin de hacer explícito el contrato didáctico (Brousseau, 1998).

Con base en mi experiencia personal al tratar esta problemática en cursos de álgebra y estadística con futuros profesores y estudiantes de matemáticas, el cuadro 1 suele representar una dificultad para que el alumno pueda dar una respuesta correcta, ya que la probabilidad de que la hormiga esté en el vértice A no es igual a la de encontrarse en los demás vértices, esto no sólo en las primeras caminatas, sino en todas. En este caso, el cuadro podría no ser una herramienta eficaz para probar que la probabilidad del vértice A es igual a la de B, C y D.

En este sentido, y desde la noción de representación semiótica propuesta por

Duval (1995), los estudiantes a menudo se adhieren a un tipo de representación (en su mayoría "concreta") y no se mueven a otra, aun cuando el profesor les muestra que otro tipo de representación es más adecuada o eficaz. Esta falta de flexibilidad en el movimiento de un tipo de representación a otro se puede interpretar como la concepción que tienen los estudiantes de las diferentes representaciones; en suma, para un mismo concepto matemático, sus representaciones son totalmente distintas y autónomas (Anastasiadou y Gagatsis, 2007).

ALGUNAS CONCLUSIONES

El análisis de este problema metafórico-matemático ha mostrado la complejidad que conlleva el estudio de las probabilidades y la riqueza de las variadas representaciones que podemos realizar de la misma problemática. Se propone como ejemplo el concepto de paseos al azar sobre un conjunto finito para mostrar que el profesor tiene varias metáforas entre las que puede elegir, y que una sola podría no ser lo suficientemente robusta como para representar fielmente todas las características de dicho concepto.

El abordaje metafórico de esta problemática permite visualizar que la concepción "natural" de probabilidad es consistente con la idea de la probabilidad que se entiende fuera de las matemáticas, a partir de las ideas e intuiciones básicas del estudiante. Es de relevancia destacar que esta propuesta educativa, destinada a estudiantes de enseñanza secundaria, permite el uso de representaciones, simulaciones y medios didácticos en el aprendizaje del concepto probabilidad, permitiendo el florecimiento de las metáforas y el hacer cuerpo del concepto probabilidad.

En cuanto a los procedimientos de resolución, los problemas comunes que se tratan en el aula son pobres al mostrar un algoritmo único e inclinado hacia el cálculo algebraico. Respecto al enunciado de un problema, se ha pasado en los últimos años del rigor matemático actualmente a la presentación intuitiva, pero sigue siendo un desafío para el profesor bajar de lo abstracto del concepto matemático al mundo cotidiano con el uso de metáforas contextualizadas y sugeridas en la realidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acevedo, I. (2005), "Metaphors in mathematics classrooms: Analyzing the dynamic process of teaching and learning to graph function", en *Proc.* CERME *4*. Recuperado de http://ermeweb.free.fr/CERME4/

Anastasiadou, S. y A. Gagatsis (2007), "Exploring the effects of representations on the learning of statistics in Greek primary school", en *Proc.* CERME *5*. Recuperado de http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME5b/.

Araya, R. (2000), *La inteligencia matemática*, Santiago de Chile, Editorial Universitaria.

Batanero, C. (2000), "Controversies around significance tests", *Mathematical Thinking and Learning*, vol. 2, núms. 1-2, pp. 75-98.

Bennet, D. J. (1998), *Randomness*, Nueva York, Cambridge University Press.

Brousseau, G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, Grenoble, La pensée sauvage.

Cerda-Morales, G. (2012), "studio discreto del movimiento browniano: Memorias de una hormiga caminante", *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* núm. 32, pp. 157-164.

Dubinsky, E. (1999), "Review of *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images*", L. D. English (comp.), *Notices of the Amer. Math. Soc.*, vol. 46, núm. 5, pp. 555-559.

Duval, R. (1995), *Semiosis et pensée humaine*, Berna, Peter Lang.

——— (1996), "Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques?", *Recherche en Didactique des* Mathématique, vol. 16, núm. 3, pp. 348-382.

Gal, I. (2005), "Democratic access to probability: Issues of probability literacy", en G. A. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, Nueva York, Springer, pp. 39-63.

Gardner, H. (2005), *Las cinco mentes del futuro: un ensayo educativo*, Buenos Aires, Paidós.

Johnson, M. y G. Lakoff (2003), *Metaphors we live by*, Nueva York, The University of Chicago Press.

Lakoff, G. y R. Núñez (2000), *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Nueva York, Basic Books.

Marghetis, T. y R. Núñez (2013), "The motion behind the symbols: A vital role for dynamism in the conceptualization of limits and continuity in expert mathematics", *Topics in Cognitive Science,* vol. 5, núm. 2, pp. 299-316.

Núñez, R. y W. J. Freeman (2000), *Reclaiming cognition: The primacy of action, intention and emotion*, Bowling Green, OH, Imprint Academic.
Núñez, R. (2000), "Mathematical idea analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics", en *Proceedings of the 24th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 1, pp. 3-22, Hiroshima, Hiroshima University.
Palmquist, R. (2001), "Cognitive style and users' metaphors for the web: an exploratory study", *The Journal of Academic Librarianship*, vol. 27, núm. 1, pp. 24-32.
Presmeg, N. C. (1997), "Reasoning with Metaphors and Metonymies in Mathematics Learning", en L. D. English (comp.), *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images*, Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 267-279.
Sfard, A. (1994), "Reification as the birth of metaphor", *For the Learning of Mathematics,* vol. 14, núm. 1, pp. 44-55.
——— (1997), "Commentary: On metaphorical roots of conceptual growth", en L. D. English (comp.), *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images*, Londres, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 339-371.
Soto-Andrade, J. (2006), "Un monde dans un grain de sable: Métaphores et analogies dans l'apprentissage des mathématiques", *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, vol. 11, pp. 123-147.
——— (2007), "La cognición hecha cuerpo florece en metáforas...", en A. Ibañez y D. Cosmelli (eds.), *Nuevos enfoques de la cognición. Redescubriendo la dinámica de la acción, la intención y la intersubjetividad*, Santiago de Chile, Universidad Diego Portales, pp. 71-90.
Tall, D. (2005), "A Theory of Mathematical Growth through Embodiment, Symbolism and Proof", *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, vol. 11, pp. 195-215.
Varela, F. J. (1995), "Resonant cell assemblies: a new approach to cognitive functions and neuronal synchrony", *Biological Research*, vol. 28, núm. 1, pp. 81-95.
Varela, F., E. Thompson y E. Rosch (1998), *The embodied mind: cognitive science and human experience*, Cambridge, MIT Press.

DATOS DEL AUTOR

Gamaliel Cerda-Morales
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
gamaliel.cerda.m@mail.pucv.cl